Pour $m > 1$: $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

Pour $m = 1$:

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim_{+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x} = \lim_{+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

4°/ On a : $\lim\limits_{+\infty} f_m$ est finie si $m = 1$

D'où pour $m = 1$, Cf_m admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $y = \frac{1}{2}$

5°/ $\lim\limits_{+\infty} f_m(x) = \begin{cases} +\infty \text{ pour } m < 1 \\ -\infty \text{ pour } m > 1 \\ \frac{1}{2} \text{ pour } m = 1 \end{cases}$

Pour $m \neq 1$ on a :

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-mx}{x}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x.\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-m\right)}{x} = 1 - m$$

$$\lim_{+\infty} [f(x) - (1-m)x]$$

$$= \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - mx - x + mx$$

$$= \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \frac{1}{2}$$

D'où : $D_m : y = (1-m)x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à Cf_m au voisinage de $+\infty$